第三章 一元微分学

2018 年 12 月 5 日

目录

1 导数和微分的概念

1.1 导数和微分的定义

考虑函数$y=f(x)$在x_0的邻域内有定义。当$x\to x_0$时，记

$$\Delta x = x - x_0;$$
$$\Delta y = f(x) - f(x_0).$$

定义1.1. 若函数$y=f(x)$在其定义域中的一点x_0处极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称$f(x)$在x_0处**可导**，并称这个极限值为$f(x)$在x_0处的导数，记作$f'(x_0)$，或$y'(x_0)$, $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。若$f(x)$在某一区间上处处可导，则称$f'(x)$为$f(x)$在该区间上**导函数**。

定义1.2. 对函数$y=f(x)$定义域中的一点x_0，若存在只与x_0有关，而与Δx无关的数$g(x_0)$使得当$\Delta x\to 0$时有

$$\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

则称$f(x)$在x_0处**可微**，记作

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = g(x_0)\mathrm{d}x.$$

定理1.1. 一元函数$y=f(x)$在x_0处可微的充分必要条件是$f(x)$在x_0处可导，且有

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

定理1.2. 函数$f(x)$在x_0点可导，则$f(x)$必在x_0点连续。

例1.1. 用定义验证：

$$(c)'=0,\ (c\text{是常数});$$
$$(a^x)'=a^x\ln a;$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{(\ln a)x},\ x>0;$$
$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\ x>0;$$
$$(\sin x)'=\cos x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x.$$

例1.2. 用定义验证：$y=x^{\frac{2}{3}}$在$x=0$点不可导。

1.2 导数的几何意义

给定函数$y=f(x)$，导数定义中取极限的函数：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

表示图像上连接点$(x_0, f(x_0))$ 和点$(x, f(x))$ 的直线段的斜率。若$f(x)$ 在x_0 点可导，则当$x \to x_0$ 时，该斜率存在极限，即为$(x_0, f(x_0))$ 点图像切线的斜率。同时由可微与可导的等价性，

$$\Delta y - f'(x_0)\Delta x = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

是关于Δx 的高阶无穷小量。记

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

则$y = l(x)$ 给出切线对应的函数表达。

例1.3. 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1(a, b > 0)$ 上任一点(x_0, y_0) 处的切线方程。

1.3 单侧导数

定义1.3. 若函数$y = f(x)$ 在定义域中的点x_0 处，极限

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限值为$f(x)$在x_0 点的**右导数**，记作$f'_+(x_0)$；若极限

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限值为$f(x)$在x_0 点的**左导数**，记作$f'_-(x_0)$。

定理1.3. 函数$f(x)$ 在x_0 点可导的充分必要条件是：$f(x)$ 在x_0 点的左右导数存在且相等。

例1.4. 考察函数$f(x) = |x|$ 在$x = 0$ 处的可导情况。

例1.5. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

在$x = 0$ 处的可导情况。

例1.6. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & x > 2, \\ ax + 1, & x \le 2. \end{cases}$$

试确定a, b 使得$f(x)$ 在$x = 2$ 处可导。

2 导数的计算

2.1 四则运算

定理2.1. 设函数$f(x), g(x)$ 均在点x 处可导，则$af(x) + bg(x)(a, b \in \mathbb{R})$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$ 均在点x 处可导，且

(1) $(af(x)+bg(x))' = af'(x)+bg'(x)$；

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，（*Leibniz* 公式）；

(3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

例2.1. 验证下列函数的导数：

$$(\tan x)' = (\sec x)^2;$$
$$(\cos x)' = -(\csc x)^2;$$
$$(\sec x)' = \tan x \sec x;$$
$$(\csc x)' = -\cot x \csc x.$$

例2.2. 求下列函数的导数：

(1) $y = e^x(\sin x + \tan x)$；

(2) $y = \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x}+1}$.

2.2 复合函数求导

定理2.2 (链式法则)**.** 设函数$y=f(x)$ 在点u_0 处可导，$u=g(x)$ 在点x_0 处可导，且$u_0=g(x_0)$，则复合函数$y=f(g(x))$ 在点x_0 处可导，且有

$$(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(u_0)g'(x_0),$$

或写成

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0} \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

由链式法则得到复合函数的微分公式为：

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u = f'(u)g'(x)\mathrm{d}x.$$

作为中间变量的u，在第一个等号处，变量u 作为自变量，在第二个等号处，变量u 作为因变量。复合函数的链式法则告诉我们作为自变量的$\mathrm{d}u$ 和作为因变量的$\mathrm{d}u$ 是一样的，这也被称为**一阶微分形式不变性**。

例2.3. 验证下列函数的导数：

$$(\sinh x)' = \cosh x;$$
$$(\cosh x)' = \sinh x.$$

例2.4. 求下列函数的导数：

(1) $y=\cos(\sin x^3)$；

(2) $y=(\sin x)^{\cos x}$;

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

例2.5. 设函数$f(x)$ 在x_0 处可导，且$f(x_0)\neq 0$，证明：$(\ln|f(x)|)'|_{x=x_0}=\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$.

例2.6. 求下列函数的导数：

(1) $y=(1+x^2)^{\tan x}$;

(2) $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$.

2.3 反函数求导

定理2.3. 设函数$y=f(x)$ 在(a,b) 上可导且严格单调，并且$f'(x)\neq 0$。记$\alpha=\min\{f(a+),f(b-)\},\beta=\max\{f(a+),f(b-)\}$。则它的反函数$x=f^{-1}(y)$ 在(α,β) 上可导，且有

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

例2.7. 验证下列函数的导数：

$$(\mathrm{arcsin}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\mathrm{arccos}x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\mathrm{arctan}x)'=\frac{1}{1+x^2};$$
$$(\mathrm{arccot}x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

2.4 隐函数求导

设函数$y=f(x)$ 由方程$F(x,y)=0$ 确定，则$F(x,f(x))\equiv 0$。故对方程两边求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x,f(x))\right)=0.$$

由此得到关于$f'(x)$ 的方程，并通过解方程得到$f'(x)$。

例2.8. 设$y=y(x)$ 由下列方程确定，求$y'(x)$:

(1) $e^{xy}+\cos(xy)-y^2=0$;

(2) $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$.

2.5 参数方程求导

设平面曲线C 由参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]$$

给出，并且$x(t),y(t)$ 均可导。若$x'(t)\neq 0$，由下两节的知识可知$x=x(t)$ 严格单调，故存在反函数$t=t(x)$，且$t=t(x)$ 可导，由反函数求导法则得

$$t'(x)=\frac{1}{x'(t)}.$$

由此确定的x, y之间的函数关系$y = y(t(x))$，由复合函数求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

若$y'(t) \neq 0$，类似可得函数关系$x = x(t(y))$以及

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{x'(t)}{y'(t)}.$$

例2.9. 圆的渐开线方程为

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad a > 0$$

求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

例2.10. 求四叶玫瑰线$r = a\sin(2\theta)(a > 0)$ 在$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程。

3 高阶导数

3.1 高阶导数的概念

定义3.1. 设函数$y = f(x)$ 在点x_0 的某邻域内有导函数$f'(x)$。若$f'(x)$ 在x_0 处可导，则称$f(x)$ 在x_0 处**二阶可导**，$f(x)$ 的二阶导数记作$f''(x_0)$，即

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0},$$

也可以记作

$$y''(x_0), \ \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}, \ \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}.$$

一般地，若$f(x)$ 的$n-1$ 阶导函数$f^{(n-1)}(x)$ 在x_0 处可导，则称$f(x)$ 在x_0 处n **阶可导**，$f(x)$ 的n阶导数记作$f^{(n)}(x_0)$，即

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0},$$

也可以记作

$$y^{(n)}(x_0), \ \left.\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}, \ \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}.$$

例3.1. 求下列函数的n 阶导数：

(1) $y = (ax+b)^\alpha$;

(2) $y = \sin(ax)$;

(3) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

例3.2. 试求$f(x) = |\sin x|^3$ 在$x = 0$ 处的最高阶导数。

3.2 高阶导数的计算

原则上讲，高阶导数总是可以通过一阶一阶的求导得出。

定理3.1. 设函数$f(x), g(x)$ 在区间I 上n 阶可导，则在I 上有：

(1) $(af(x)+bg(x))^{(n)} = af^{(n)}(x)+bg^{(n)}(x)$;

(2) $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$, 其中$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

例3.3. 设$g(x)$ 二阶可导，且$g(x)\neq 0$，验证：

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'' = \frac{-g''(x)g(x)+2(g'(x))^2}{(g(x))^3}$$

例3.4. 设$y=f(u)$ 与$u=g(x)$ 均二阶可导，验证：复合函数$y=f(g(x))$ 的二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$$

例3.5. 设由方程$e^{xy}+x^2y-1=0$ 确定的函数$y=y(x)$ 二节可导，求y''.

例3.6. 设函数$y=y(x)$ 由下列参数方程确定，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad (a>0).$$

4 微分中值定理及其应用

4.1 Fermat引理和Rolle定理

定义4.1. 设函数$f(x)$ 的定义域为D_f。若对于点$x_0\in D_f$，存在$\delta>0$，使得$U(x_0,\delta)\subseteq D_f$ 且

$$f(x)\leq f(x_0)(\text{或}f(x)\geq f(x_0)),\ \forall\, x\in U(x_0,\delta)$$

则称$f(x_0)$ 为$f(x)$ 的**极大值（或极小值）**，而点x_0 称为**极大值点（或极小值点）**。

极大值点和极小值点统称为极值点。

定理4.1 (Fermat 引理)**.** 若函数$f(x)$ 在x_0 点可导，且x_0 点为极值点，则$f'(x_0)=0$.

对可导函数$f(x)$，$f'(x)=0$ 的点称为**驻点**。

定理4.2 (Darboux 定理)**.** 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导，且$f'_+(a)<f'_-(b)$，则$\forall\,\lambda\in(f'_+(a),f'_-(b))$，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\lambda$.

Darboux定理告诉我们区间上的导函数满足介值定理，虽然它不一定连续。所以，不是所有的函数都能称为某个可导函数的导函数。

定理4.3 (Rolle 中值定理)**.** 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，且$f(a)=f(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$ 使得$f'(\xi)=0$.

例4.1. 设函数$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上可导，且有n 个零点，若$f(a)f'_+(a)>0$，则$f'(x)$ 在$(a,+\infty)$ 上至少有n 个零点。

例4.2. 设函数$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=\dfrac{\pi}{2}$，且$0\le f(x)\le \arctan\dfrac{1}{x}$，证明：存在$\xi\in(0,+\infty)$ 使得

$$(1+\xi^2)f'(\xi)=-1.$$

4.2 Lagrange中值定理和Cauchy中值定理

定理4.4 (Lagrange 中值定理)**.** 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，则存在$\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

定理4.5 (Cauchy 中值定理)**.** 设函数$f(x),g(x)$ 均在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，且$g'(x)\neq 0,\forall\, x\in(a,b)$，则存在$\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例4.3. 证明：区间I 上的函数$f(x)$ 为常值函数的充分必要条件是$f(x)$ 可导且$f'(x)=0,\forall\, x\in I.$

例4.4. 设函数$f(x)$ 在区间I 上可导。

(1) 若$f'(x)$ 在I 恒正（或恒负），则$f(x)$ 在I 上严格递增（或严格递减）。

(2) 若$f'(x)$ 在I 上有界，则$f(x)$ 在I 上一致连续。

例4.5. 设函数$f(x)$ 在点x_0 处右连续，且存在$\delta>0$ 使得$f(x)$ 在$(x_0,x_0+\delta)$ 内可导。若$f'(x_0+0)=\lim_{x_0\to x_0+}f'(x)$ 存在，证明：$f(x)$ 在点x_0 处右导数存在，且

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

例4.6. 设函数$f(x)$ 在(a,b) 上可导。证明：(a,b) 内的点或是$f'(x)$ 的连续点，或是$f'(x)$ 的第二类间断点。

例4.7. 设函数$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上二阶可导，$f(a)>0,f'_+(a)<0$ 且$f''(x)<0,\forall x>a$. 证明：$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 中有且只有一个零点。

例4.8. 设$a<b,ab>0$，证明：存在$\xi\in(a,b)$ 使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b).$$

例4.9. 设$f(x)$ 在(a,b) 内二阶可导，证明：对(a,b) 中任意两点x_0,x ，存在ξ 在x_0,x 之间，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

4.3 L'Hospital 法则

以$x \to x_0$ 的极限情形为例，设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，要求分数型函数$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$。目前以下几种情形已知：

(1) 若A, B 是常数且$B \neq 0$，则运用极限的四则运算法则有：$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$;

(2) 若A 是常数或∞, $A \neq 0, B = 0$, 则用定义可验证：$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$;

(3) 若A 是常数，$B = \infty$，则用定义可验证：$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

剩余$A = B = 0$ 和$A = \infty, B = \infty$ 的情形未知，我们简称为$\dfrac{0}{0}$ 型极限和$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限。L'Hospital 法则用来处理这两种类型的极限。

以下两个定理我们给出$x \to x_0+$ 和$x \to +\infty$ 的极限情形的L'Hospital 法则，对于$x \to x_0-$ 和$x \to -\infty$ 的极限情形可类似得到，对于$x \to x_0$ 和$x \to \infty$ 的极限情形可以通过两侧极限的结果综合得到。

定理4.6 (L'Hospital 法则I). *设函数$f(x), g(x)$ 在$(x_0, x_0 + \delta)(\delta > 0)$ 内可导，并且对于$\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有$g'(x) \neq 0$ 以及*

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \text{ 是常数或}\infty, \pm\infty).$$

若还有$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} g(x) = 0$ 或$\lim\limits_{x\to x_0+} g(x) = \infty$ 则

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

定理4.7 (L'Hospital 法则II). *设函数$f(x), g(x)$ 在$(a, +\infty)$ 内可导，并且对于$\forall\ x \in (a, +\infty)$ 有$g'(x) \neq 0$ 以及*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \text{ 是常数或}\infty, \pm\infty).$$

若还有$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$ 或$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \infty$ 则

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

例4.10. *求下列极限：*

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1 - \cos x}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

例4.11. 当$x \to +\infty$ 时，下列函数

$$\ln x,\ x^{\lambda}(\lambda > 0),\ e^{x},\ x^{x}$$

均为无穷大，证明：上面排列中，后一个函数是前一个函数的更高阶无穷大。

例4.12. 设函数$f(x)$ 在点x_0 处二阶可导，证明：

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

4.4 Taylor 公式

充分光滑的函数$f(x)$ 可以用多项式近似，Taylor公式主要研究:

(1) 什么样的多项式可以用来最好地逼近$f(x)$，它的阶数和系数如何用f 确定？

(2) 误差怎么表达或估计？

带Peano余项的Taylor公式

定理4.8 (带Peano余项的Taylor公式)**.** 设函数$f(x)$ 在点x_0 处n 阶可导，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x-x_0).$$

其中$r_n(x-x_0) = o\left((x-x_0)^n\right)(x \to x_0)$ 称为*Peano*余项。

当$n=1$，带Peano余项的Taylor公式即$f(x)$ 在点x_0 处可微的定义。

当$x_0 = 0$ 时，也称为带Peano余项的Maclaurin公式

例4.13. 验证下列函数带*Peano*余项的*Maclaurin* 公式：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + o(x^n), (x \to 0);$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), (x \to 0);$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), (x \to 0);$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + o(x^n), (x \to 0);$$
$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), (x \to 0).$$

例4.14. 将函数展开为带*Peano*余项的*Maclaurin*公式：

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+x}{a-x}(a>0)$;

(2) $f(x) = e^{\sin x}$.

例4.15. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x} - \sqrt{x^2-2x})$.

带Lagrange余项的Taylor公式

定理4.9 (带Lagrange余项的Taylor公式). 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有n 阶连续导数，在(a,b) 内$n+1$ 阶可导，则对于$\forall\, x_0, x\in[a,b]$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x-x_0)$$

其中

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称为*Lag range*余项，点ξ 位于x_0,x 之间，也写作$\xi=x_0+\theta(x-x_0),\theta\in(0,1)$.

当$n=0$ 时，带Lagrange余项的Taylor公式即Lagrange中值定理。

当$x_0=0$ 时，也称为带Lagrange余项的Maclaurin公式

例4.16. 验证下列函数带*Lagrange*余项的*Maclaurin* 公式:

$$\begin{aligned}
&e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ \theta\in(0,1);\\
&\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\frac{(-1)^n\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ \theta\in(0,1);\\
&\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2},\ \theta\in(0,1);\\
&\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1},\ \theta\in(0,1);\\
&(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\
&\qquad\qquad+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)}{n!}x^{n+1},\theta\in(0,1).
\end{aligned}$$

例4.17. 设函数$f(x)$ 在点x_0 的某邻域内三阶可导，且$f'''(x_0)\neq 0$，有*Taylor*公式有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0+\theta h)}{2!}h^2,\ \theta\in(0,1).$$

证明：$\lim_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{3}$.

例4.18. 设函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上二阶可导，且在$[0,1]$ 上满足

$$|f(x)|\le a,\ |f''(x)|\le b,\ (a,b\ge 0)$$

证明：$\forall\, x\in(0,1)$，有

$$f'(x)\le 2a+\frac{b}{2}.$$

5 导数的应用

5.1 单调性与一阶导数

定理5.1. 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上单调递增（或递增）的充分必要条件是：$\forall\, x\in(a,b)$，有$f'(x)\ge 0$ （或$f'(x)\le 0$）。

定理5.2. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单调递增（或递增）的充分必要条件是：

(1) $\forall\, x \in (a,b)$，有$f'(x) \geq 0$（或$f'(x) \leq 0$）*;*

(2) 在(a,b)内任一子区间上$f'(x)$不恒为零。

例5.1. 讨论函数$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-5)$的单调区间。

例5.2. 讨论函数$f(x) = \left(\arctan\dfrac{x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}$在$(0,1)$内的单调性。

例5.3 (Jordan 不等式)**.** 证明：当$x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$时，有

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

例5.4. 证明：当$x \geq 0$时，有

$$\frac{\arctan x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

例5.5. 设$e \leq a < b \leq e^2$，证明：

$$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

5.2 凸性与二阶导数

定义5.1. 设函数$f(x)$定义在区间I上，若$\forall\, x_1, x_2 \in I, \forall\, \lambda \in [0,1]$有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称$f(x)$为I上**下凸函数**（习惯上将下凸函数简称为**凸函数**）。

定理5.3. 设函数$f(x)$定义在区间I上，则以下命题等价：

(1) 则称$f(x)$为I上的凸函数；

(2) $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2};$$

(3) 若$f(x)$在I上可导，则$\forall\, x_1, x_2 \in I$有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

定理5.4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则$f(x)$在$[a,b]$上为凸函数的充分必要条件是：$f'(x)$在(a,b)内单调递增。

定理5.5. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导，则$f(x)$在$[a,b]$上为凸函数的充分必要条件是：$\forall\, x \in (a,b), f''(x) \geq 0.$

定义5.2. 设函数$f(x)$ 在x_0 的邻域$U(x_0)$ 内连续，而在x_0 两侧有不同的凸性，则称x_0 为$f(x)$ 的**拐点**。相应地，称$(x_0, f(x_0))$ 为函数图像的拐点。

定理5.6. 设$f(x)$ 为I 上的凸函数，则$f(x)$ 满足以下性质：

(1) $\forall\, x_0 \in I$，函数
$$K(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
在$I \backslash \{x_0\}$ 上递增;

(2) 若x_0 为I 的内点，则$f'_+(x_0)$ 与$f'_-(x_0)$ 均存在，且$f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$;

(3) I 的所有内点都是$f(x)$ 的连续点

(4) $\forall\, x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$，有$f'_+(x_1) \le f'_-(x_2)$;

(5) $f'_+(x), f'_-(x)$ 均在I 的内部单调递增。

定理5.7 (Jensen 不等式)**.** 设$f(x)$ 为I 上的凸函数，则对于$\forall x_k \in I, \lambda_k \in (0,1)(k = 1, 2, \cdots, n)$ 且$\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, 有
$$f\left(\sum_{k=1}^{k} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

例5.6. 设$0 < a \le b$，证明：
$$(a+b)e^{a+b} \le ae^{2a} + be^{2b}.$$

例5.7 (广义A-G 不等式)**.** 设$x_k > 0, \lambda_k \in (0,1)(k = 1, 2, \cdots, n)$ 且$\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$，证明：
$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

例5.8 (Young不等式)**.** 设$a, b > 0, p, q > 1$ 且$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，证明：
$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

例5.9. 设函数$f(x)$ 定义在区间I 上，$f(x) > 0$ 且$f(x)$ 是I 上凸函数。证明：$\ln f(x)$ 也是I 上凸函数。

5.3 极值与最值

定理5.8 (极值第一充分条件)**.** 设函数$f(x)$ 在点x_0 处连续，在$\mathring{U}(x_0)$ 内可导。

(1) 若$f'(x)$ 在x_0 两侧异号，则$f(x)$ 在x_0 处取得严格极值；

(2) 若$f'(x)$ 在x_0 两侧同号，则$f(x)$ 在x_0 处不取极值。

定理5.9 (极值第二充分条件)**.** 设函数$f(x)$ 在$U(x_0)$ 内定义，在点x_0 处二阶可导，且$f'(x_0) = 0$.

(1) 若$f''(x) < 0$，则$f(x)$ 在x_0 处取得严格极大值；

(2) 若$f''(x) > 0$，则$f(x)$ 在x_0 处取得严格极小值。

定理5.10. 设函数$f(x)$ 在$U(x_0)$ 内定义，在点x_0 处n 阶可导，且$f^{(k)}(x_0) = 0, k = 1, 2, \cdots n-1$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(1) 当n 是奇数，则$f(x)$ 在x_0 不取极值；

(2) 当n 是偶数：若$f^{(n)}(x_0) < 0$，则$f(x)$ 在x_0 处取得严格极大值；若$f^{(n)}(x_0) > 0$，则$f(x)$ 在x_0 处取得严格极小值。

例5.10. 求下列函数的极值点与极值：

(1) $f(x) = (x-2)^2 x^{\frac{2}{3}}$;

(2) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$.

例5.11. 求函数$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}(x-5)^2$ 在$[-2, 2]$ 上的最值。

例5.12. 在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 位于第一象限的曲线上求一点$P(x_0, y_0)$，使得过P 点的切线下方，椭圆周上方以及两坐标轴所围城的部分面积最小。

5.4 函数作图

函数的渐进线

定义5.3. 设C 为平面曲线$y = f(x)$，若存在直线L 使得当动点P 沿着曲线C 远离原点时，点P 与直线L 的距离趋于零，则称直线L 是曲线C 的**渐进线**。

渐进线主要有三种：

(1) 水平渐进线$y = c$：若常数c 使得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \ (\text{或} \lim_{x\to-\infty} f(x) = c);$$

(2) 垂直渐进线$x = x_0$：若有点x_0 使得

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty \ (\text{或} \lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty);$$

(3) 斜渐进线$y = ax + b$: 若有常数a, b，使得当$x \to +\infty$ 或$x \to -\infty$ 时，$f(x) - ax - b$ 为无穷小量，即

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$$

或

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax).$$

作图规范

函数作图的一般步骤为：

(1) 确定函数的定义域，考察函数的奇偶性、周期性；

(2) 找出函数的特殊点：不连续点、驻点、拐点等；

(3) 以上点为端点将定义域划分成若干区间，讨论各个区间上函数的单调性与凸性；

(4) 确定函数的渐进线；

(5) 列表反应上述信息，并画出图像。

例5.13. 作出下列函数的图像：

(1) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;

(2) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$;

(3) $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$.