

# Chap 10—3

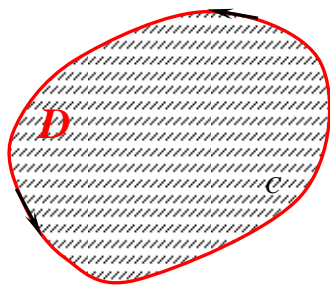
# Green 公式

## 10.3.1 Green 公式

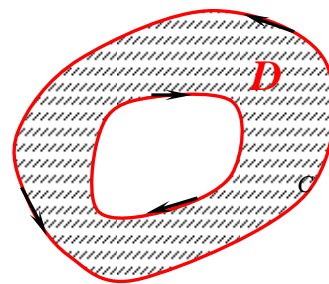
### 一. 连通区域及其边界方向

若 $D$ 为平面区域, 则 $D$ 是**连通**的. 若连通域 $D$ 内任意一条闭曲线所围成的区域都落在 $D$ 内, 则称 $D$ 为**单连通**的, 否则称 $D$ 为**复连通**的


单连通区域



复连通区域



当点沿区域边界朝一个方向前进时, 区域总在其左侧, 将此方向规定为闭曲线的正向, 记为 $C^+$ , 与 $C^+$ 相反的有向曲线记为 $C^-$



当平面闭曲线是单连通区域的边界时，依显然  
逆时针方向为其正向。

➤ 闭曲线上的第二类曲线积分未规定方向时，  
则沿正向积分

## 二. Green 公式

设函数  $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$  在有界区域  $D$  上有连续的  
偏导数， $D$  的边界  $C$  是分段光滑曲线，则有公式

常常写成  
符号  $\oint$

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

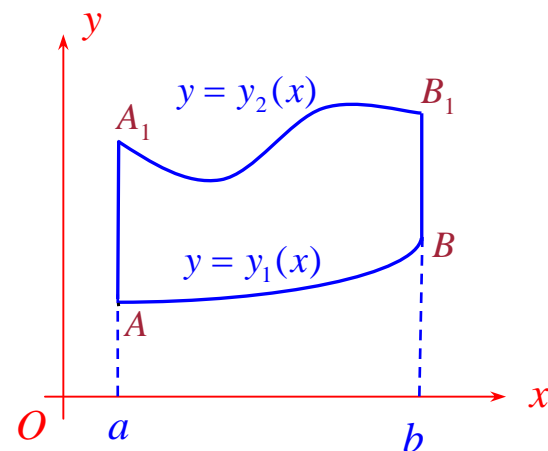
(二重积分与在其边界上的第二型曲线积分的关系)

# 证明的思路

1) 先考虑区域  $D$  是  $x$  型正规区域的情况

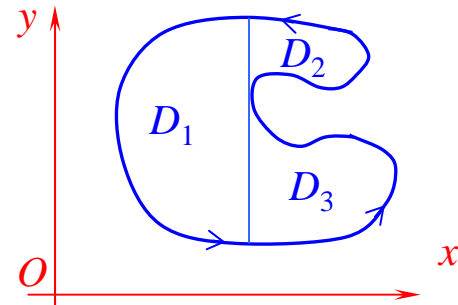
$$D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$


证 
$$\oint_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$



2) 再考虑  $D$  为一般区域

将  $D$  分割成几个正规区域





例 计算  $I = \oint_C (y - x)dx + (3x + y)dy$

---

其中曲线  $C : x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$

例 计算

$$I = \int_{AO} (e^x \sin y - 4y + x)dx + (e^x \cos y - 3)dy$$


$AO$ 是由 $A(a, 0)$ 到 $O(0, 0)$ 的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax$   
( $y \geq 0$ )

例 计算星形线  $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$

所围面积

$$A = \frac{1}{2} \oint_{C^+} xdy - ydx$$

---



## 例 计算积分曲线

---

$$\oint_{C^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

其中 $C^+$ 是包围原点的任一正向闭曲线

### Green 公式的向量形式

$F = (u(x, y), v(x, y))$        $n^0$  为 $C^+$ 的单位外法向量

利用切向量  $\Rightarrow n^0 = \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$

$$\oint_{C^+} F \cdot n^0 ds = \iint_D \nabla \cdot F d\sigma$$

---



# H.W

---

习题10      19(2) 20 (2) (3) (5) (7)

补充题 计算积分

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$$

其中 $L$ 是以 $(1, 0)$ 为中心, 半径 $R > 1$ 的取逆时针方向的圆周

(2000年考研试题)

---



## 10.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件

---

设函数 $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$  上在单连通区域 $D$  有连续的偏导数, 则下面的四个条件互相等价:

(i) 在 $D$ 内的任一条逐段光滑的闭曲线 $C$ 上

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$

(ii) 在 $D$ 内任一曲线积分 $\int_C Pdx + Qdy$  与路径无关

(iii)  $Pdx + Qdy$  是某个函数 $u$ 的全微分, 即

$$du = Pdx + Qdy$$

(此时称 $u(x,y)$  是 $Pdx + Qdy$  的原函数)

---



(iv) 在 $D$ 内恒有

---

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

例 计算积分  $\int_{AB} 2e^{2x} \cos y dx - e^{2x} \sin y dy$ , 其中 $AB$ 是上半椭圆  $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  由 $A(0, 0)$ 到 $B(2, 3)$ 的弧

例 设积分  $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$  与路径无关, 其中  $\varphi$  有连续导数,  $\varphi(0) = 0$ , 计算  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$

(1989年考研试题)

---



---

# H.W

## 习题10

21 (3) (该题符号有错, 应为  $(x - e^{-x} \cos y)$ )

23 (1) (3)

24 25

---

### 10.3.3 全微分求积（全微分方程）

设函数 $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$ 上在单连通区域 $D$ 有连续导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

则  $Pdx + Qdy$  是某个函数 $u$ 的全微分

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

← ( $u$ 的求法)

例  $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$  是否某函数的原函数, 若是, 求出一个原函数



## 原函数有另一种求法

---

例  $du = e^{2y} dx + (1 + 2xe^{2y}) dy$ , 求  $u$

若  $P(x,y) dx + Q(x,y) dy$  是某二元函数的的全微分,  
称方程

$$Pdx + Qdy = 0$$


为全微分方程

求出原函数  $u$ , 则解为  $u = C$

若  $P(x,y) dx + Q(x,y) dy$  不是某二元函数的的全微分,

方程  $Pdx + Qdy = 0$  的解法:

---



求出积分因子  $\mu$ ，使得方程化为

---

$$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$$

成为全微分方程


➤ 常用积分因子  $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2 y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2}$

➤ 组合拼凑法

例 求解方程 1)  $(x - \sqrt{x^2 + y^2})dx = -ydy$

2)  $y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$

---



求出积分因子  $\mu$ ，使得方程化为

---

$$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$$

成为全微分方程

例 求解方程 1)  $(x - \sqrt{x^2 + y^2})dx = -ydy$

2)  $y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$

**H.W** 习题10

22 (2) (3)

26 (1) (2) (3) (4)

---