


Chap 10—2

第二类曲线积分 和曲面积分

10.2.1 向量值函数曲线积分的概念

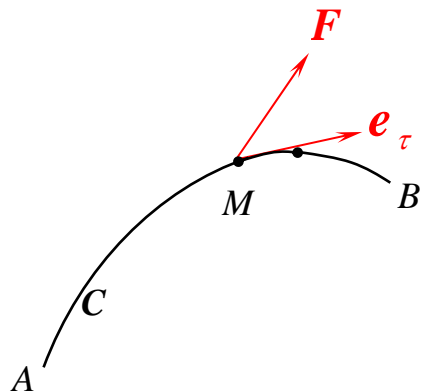
一. 例子与概念

问题

设在光滑平面曲线 C 上有连续的作用力 $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, 求 F 作用于 C 上质点 从起点 A 移动到终点 B 所做的功为多少?

考察质点在 C 上任一 M 处
移动一段弧微元所作的功

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\tau ds$$
$$\Rightarrow W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\tau ds$$





由于单位切向量 $e_\tau = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$

$$\Rightarrow e_\tau ds = (dx, dy)$$

于是

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\tau ds = \int_C Pdx + Qdy$$

← (给出两类曲线积分关系)

向量函数 $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ 在曲线 C 切方向 (A到B) 上投影的曲线积分写成

$$\int_C Pdx + Qdy$$

称为向量值函数曲线积分或第二类曲线积分

记 $\mathbf{r} = (x,y)$, 可将其写为 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ← (向量形式)



二. 性质


与第一类曲线积分不同,第二类曲线积分与曲线方向有关

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$$

还有与其他积分类似的性质,例如线性与可加性

注意

- 1) 两种曲线积分形式的不同
 - 2) $Q=0$ 或 $P=0$, $\int_C Pdx$ 或 $\int_C Qdy$ 仍是第二类
-



例 试将第二类曲线积分

$$\int_C x^2 dx - xy dy$$

化为第一类曲线积分, 其中 C 是由 $(-2, 0)$ 到 $(2, 0)$ 的上半圆周 $y = \sqrt{4 - x^2}$

利用 $\int_C P dx + Q dy = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\tau ds$, 注意切向量 $(1, y'(x))$

单位化可得 \mathbf{e}_τ

H.W 习题10 10

10.2.2 向量值函数曲线积分的计算

若曲线 $C: AB$ 为
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

起点 A 对应 α , 终点 B 对应 β

考察 $\int_C Pdx + Qdy = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\tau ds$, 由于

$$\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$$

$$\mathbf{e}_\tau ds = (dx, dy) = (x'(t)dt, y'(t)dt)$$

故得计算式

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$



例 计算曲线积分

$$I = \int_C 2xydx + x^2 dy$$

C 是由 $O(0, 0)$ 到 $A(1, 1)$ 的如下曲线


(1) $y = x$; (2) $y = x^3$;

(3) 由 O 经 $B(1, 0)$ 到 A 的折线

例 计算 $I = \int_C (2x + 3y)dx + (x - 3y)dy$

曲线 C 为起点 $A(1, 0)$ 到终点 $B(-1, 0)$ 的上半圆周

$$x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$$



例 平面上指向原点的力大小为 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 求其


使质点沿曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a (a > 0)$ 由点 $A(a, 0)$ 到 $B(0, a)$ 所做功

思考或猜测

空间曲线 $L=AB: x=x(t), y=y(t), z=z(t), t \in [\alpha, \beta]$

(起点 A 对应 α , 终点 B 对应 β), 则第二类曲线积分

$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 如何引进和计算



例 计算 $\int_L (y + 5z)dx - x^2 dy - 4y^2 dz$

曲线 L 是 $x = t, y = t^2, z = t^4$ 由 $(1, 1, 1)$ 到 $(0, 0, 0)$
的一段弧

H.W 习题10

11

12 (2) (3) (4)

14 15



10.4.2 向量值函数曲面积分

一. 双侧曲面

设 S 是一光滑曲面， n 是起点 P 在 S 上的任一法向量，若 P 在 S 上沿任何曲线连续变动而不越过曲面边界回到起始位置时，法向量 n 总是保持原来的指向，则称 S 是双侧曲面（Möbius面不是双侧曲面）

常选定双侧曲面 S 一侧方向为正向，称为正侧，记为 S^+ ；而封闭曲面通常取外侧为正侧



二. 概念与性质

1. 例子与概念

设均匀流体具有连续的速度 $\boldsymbol{v} = (P, Q, R)$, 这里 P, Q, R 是 x, y, z 的函数, 流体自曲面 S 的负侧流向正侧, 求单位时间通过 S 的流量

在曲面微元 dS 上, 有

$$d\Phi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^0 dS \quad (\boldsymbol{n}^0 \text{ 是单位外法向量})$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^0 dS$$

若去掉问题的物理背景, 对向量函数 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$

可以引进积分


$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 dS \quad \text{(也记为)} \quad dS$$

定侧曲面微元

记单位正侧法向量 $\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 那么

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

而 $\cos \gamma dS$ 是 dS 在 xy 平面上的投影, 是 xy 平面上面积微元, 可记为 $dx dy$, 同样 $\cos \alpha dS, \cos \beta dS$ 分别记为 $dy dz$ 和 $dz dx$, 于是又可将上述积分记为


$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dx dy$$

(这里的 S^+ 指出 \mathbf{n}^0 的方向, 即积分在哪侧进行)

上式的右端形式称为**向量值函数曲面积分**或**第二类曲面积分**

从而

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \end{aligned}$$

(两型曲面积分的关系)



2. 性质

第二类曲面积分与在曲面哪一侧积分有关


$$\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = -\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

(试提出其他性质)

三. 计算法

若曲面方程为

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D$$



则其法向量为 $\pm(A, B, C)$ ，故单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$$


而 $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$ ，导出计算式

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \pm \iint_D (PA + QB + RC) dudv$$

(其中正负号选择依据积分一侧的法向量而定)

特别当 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \pm \iint_{D_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R) dx dy$$



则其法向量为 $\pm(A, B, C)$ ，故单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$$

而 $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$ ，导出计算式

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \pm \iint_D (PA + QB + RC) dudv$$

(其中正负号选择依据积分一侧的法向量而定)

特别当 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \pm \iint_{D_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R) dx dy$$



例如

$$\iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

例 计算 $I = \iint_S xyz dx dy$, 其中 S 是单位球面

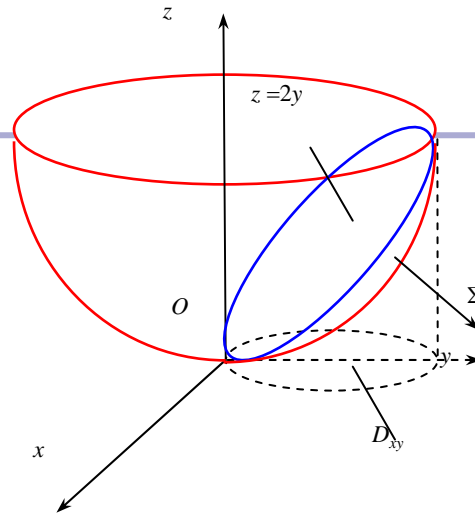
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的部分外侧: 1) $z \geq 0$; 2) $x \geq 0, y \geq 0$

例 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 3x dy dz - y dz dx - 2z dx dy$$

Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 2y$ 所截下部分的下侧

图形如右图



例 流速 $\mathbf{v} = (x, 2xy, -2z)$ 的流体，求其单位时间经过锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(0 \leq z \leq h)$ 的上侧流向下侧的流量

$$\Phi = \frac{5}{3} \pi h^3$$



例 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$) 的外侧



H.W

习题 10

16 (1)

17 (3)

(4)

(5)

18 (2)
